

Zur Strömung kompressibler Plasmen im Eigenfeld von Lichtbogenentladungen *

HELMUT HÜGEL

DFVLR-Institut für Plasmadynamik, Stuttgart

(Z. Naturforsch. 25 a, 1317—1332 [1970]; eingegangen am 10. Juni 1970)

The flow of compressible plasmas in axisymmetric channels of constant or variable cross sections under the influence of electromagnetic bodyforces and of Joule heating is described in terms of magneto-gasdynamics. The existing electric and magnetic fields are not independently applied, but originate as the electric field and self-induced magnetic field from a d. c. arc-discharge.

Under the condition of low magnetic Reynolds numbers a quasi-one dimensional description of the flow is given using the flow parameters velocity, Mach number, pressure, density and temperature. For these quantities five coupled first-order differential equations are obtained. A qualitative discussion outlines typical solutions and points out some features which are the same for flows in arc-discharges and for flows in so-called crossed fields. The conditions for a continuous passage through the sonic point are discussed. For flows in diverging nozzles results of numerical integration are presented.

Experimental investigations are reported which verify the self-magnetic effect in nozzle flows. At arc currents of 500 to 3000 amps measured values of thrust and Mach number show satisfactory agreement with theoretical results.

Stationäre Plasmastrahlen hoher Geschwindigkeiten gewinnen auf weiten Gebieten der Forschung und Technik zunehmende Bedeutung. Damit zusammenhängend finden Probleme der Erzeugung und Beschleunigung von Plasmen großes Interesse. Von den verschiedenen Möglichkeiten, stationäre Plasmaströmungen zu realisieren, seien im Hinblick auf diese Arbeit nur die Lichtbogenbeschleuniger erwähnt.

Ausgangspunkt deren Entwicklung ist eine Konstruktion, mit der PETERS Überschallplasmen von Atmosphärendruck erzeugt¹. In den ersten unter der Bezeichnung Plasmabrenner (thermal arc-jet engines) bekannt gewordenen Geräten erfolgt die Geschwindigkeitsbildung im wesentlichen durch Umwandlung der im Lichtbogen freigesetzten Jouleschen Wärme in kinetische Energie während des Expansionsvorganges in einer Laval-Düse. In der Folgezeit wird aber der elektromagnetischen Beschleunigung immer mehr Bedeutung beigemessen. Die zur Wirkung gelangenden ($\mathbf{j} \times \mathbf{B}$)-Kräfte können dabei der Wechselwirkung von elektrischen Strömen sowohl mit angelegten Magnetfeldern als auch mit dem Eigenmagnetfeld der Lichtbogenentladung entstammen. So

werden Anfang der sechziger Jahre an verschiedenen Laboratorien der USA bemerkenswerte Erfolge erzielt, als die Geschwindigkeit bei Bogenstromstärken von einigen tausend Ampere stark gesteigert werden kann^{2,3}. Die Resultate werden zunächst mit Hilfe des von MAECKER⁴ am Hochstromkohlebogen untersuchten eigenmagnetischen Effekts interpretiert, wobei der Einfluß äußerer Magnetfelder von 200 bis 500 Gauß als unbedeutend erachtet wird. Andere Untersuchungen jedoch lassen vermuten, daß selbst so geringe Magnetfeldstärken eine Geschwindigkeitszunahme zu bewirken vermögen⁵. Etwa um die gleiche Zeit weisen PETERS und RAGALLER auf die Möglichkeit der Beeinflussung von Plasmaströmungen durch eigenmagnetische Kräfte hin^{6,7}. Als Beispiel, wo das angelegte Magnetfeld die wesentliche Rolle bei der Geschwindigkeitsbildung spielt, sei das von POWERS und PATRICK untersuchte Gerät angeführt⁸. In Weiterführung der verschiedenen Arbeiten gelangt man schließlich an zahlreichen Forschungsstätten zu einer mehr oder weniger ähnlichen Konstruktion, die heute allgemein als MPD (Magneto-Plasmadynamischer)-Beschleuniger bekannt ist^{9–11}.

* Auszug aus der von der Fakultät für Maschinenwesen und Elektrotechnik der Technischen Hochschule München genehmigten Dissertation des Dipl.-Ing. HELMUT HÜGEL. Tag der Promotion: 28. 1. 1970.

¹ TH. PETERS, Naturwiss. 24, 571 [1954].

² A. C. DUCATI, G. M. GIANNINI u. E. MUEHLBERGER, AIAA J. 2, 1452 [1964].

³ R. R. JOHN, S. BENNET u. F. CONNORS, Astronaut. Acta 11, 97 [1965].

⁴ H. MAECKER, Z. Phys. 141, 198 [1955].

⁵ G. KRÜLLE u. H. HÜGEL, Z. Flugwiss. 14, 323 [1966].

⁶ TH. PETERS, Z. Naturforsch. 19 a, 1129 [1964].

⁷ K. RAGALLER, Z. Naturforsch. 21 a, 1260 [1966].

⁸ W. E. POWERS u. R. M. PATRICK, Phys. Fluids 5, 1196 [1962].

⁹ G. L. CANN, R. L. HARDER, R. A. MOORE u. P. D. LENN, NASA CR-54 705 [1966].

¹⁰ S. BENNET, R. R. JOHN, G. ENOS u. A. TUCHMAN, AIAA Paper No. 66-239 [1966].

¹¹ J. BURLOCK, P. BROCKMAN, R. V. HESS u. D. R. BROOKS, AIAA J. 5, 558 [1967].



In dieser rotationssymmetrischen Konfiguration erfolgt die Erzeugung und Beschleunigung des Plasmas in einer Lichtbogenentladung, die in Wechselwirkung mit einem in axialer Richtung divergierenden Magnetfeld steht. Thermische und verschiedene elektromagnetische Vorgänge tragen in überlagerter Weise zur Geschwindigkeitsbildung bei. Da die Lorentz-Kräfte außer radialen und axialen auch azimuthale Komponenten haben, erfährt das Plasma durch letztere eine Beschleunigung in Umfangsrichtung. Diese führt zu einer Rotation des Strahles, die bei manchen Anwendungen eine Komplizierung der gestellten Aufgabe bedeuten kann.

Fehlen hingegen äußere Magnetfelder, so treten nur in Axialebenen liegende Kräfte auf, die aus der Wechselwirkung des Bogenstromes mit seinem ringförmigen Eigenmagnetfeld herrühren. Da in diesem Falle im wesentlichen thermische und eigenmagnetische Effekte geschwindigkeitsbildend wirken, läßt sich sowohl bei theoretischen Betrachtungen als auch aus dem Experiment her deren Einfluß klarer erkennen und darstellen. Aus diesen Gründen werden Arbeiten durchgeführt, die auf eine Realisierung des eigenmagnetischen Effekts als Mittel zur kontinuierlichen Plasmabeschleunigung ausgerichtet sind^{6, 12-14}.

In der vorliegenden Arbeit wird über theoretische und experimentelle Untersuchungen berichtet, welche die Beeinflussung von Plasmaströmungen durch eigenmagnetische Kräfte betreffen.

1. Problemstellung

Eine kurze Skizzierung des hier behandelten Problems sei an Hand von Abb. 1 durchgeführt.

In einem rotationssymmetrischen Kanal gegebenen Querschnitts, dessen Symmetrieachse mit der positiven z -Achse eines Koordinatensystems zusammenfällt, wird ein Gleichstromlichtbogen stationär aufrechterhalten. Der zwischen z_A und L befindliche Teil der ansonsten elektrisch isolierten Kanalwand liegt an Anodenpotential und bildet eine Art ringförmiger Anode. In einer gewissen Entfernung stromaufwärts davon befindet sich, koaxial angeordnet, eine zylindrische Kathode. Entsprechend dieser aus phänomenologischen wie technologischen Gründen gewählten Elektrodenanordnung fließt ein Strom in negativer z -Richtung. In der stromgeregelten Ent-

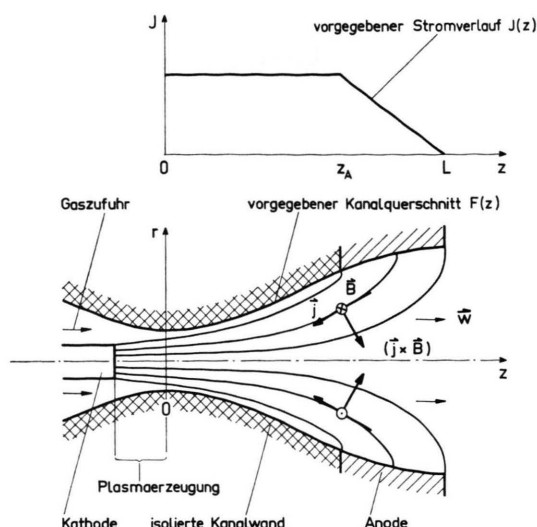


Abb. 1. Prinzipskizze des betrachteten Strömungsvorganges.

ladung stellt sich dann die elektrische Feldstärke bzw. die Brennspannung des Bogens in Abhängigkeit von den Betriebsbedingungen ein. Die Zufuhr des kalten Neutralgases erfolgt längs der Kathode. Das beim Einstromen in den Lichtbogen entstehende Plasma erfährt in seinem weiteren Strömungsverlauf zweierlei Beeinflussung durch den elektrischen Strom. Auf Grund der endlichen elektrischen Leitfähigkeit σ des Plasmas wird pro Volumen- und Zeiteinheit die Joulesche Wärme j^2/σ freigesetzt, die eine Aufheizung und vermittels Druckgradienten eine Geschwindigkeitsänderung desselben bewirkt. Die aus der Wechselwirkung von Bogenstrom mit seinem azimuthalen Eigenmagnetfeld resultierenden elektromagnetischen Kräfte verursachen – bei der hier getroffenen Elektrodenanordnung – nicht nur eine Zunahme des Impulsstromes, sondern über induzierte elektrische Felder ebenfalls eine Energiezufuhr. Weiterhin hat natürlich auch die Querschnittsveränderung längs des Kanals einen Effekt bezüglich des Strömungsverlaufes.

Die theoretische Zielsetzung besteht nun darin, den Strömungsvorgang unter Berücksichtigung der Kanalform wie der beiden genannten Wirkungen des elektrischen Stromes, insbesondere aber der eigenmagnetischen Kräfte, zu beschreiben und zu diskutieren. Experimentell gilt es, Versuche unter solchen konstruktiven wie operativen Bedingungen durchzu-

¹² G. KRÜLLE, Proc. VII. Int. Conf. Phen. Ionized Gases, Vol. III, 355 [1966].

¹³ H. HÜGEL, Contributed Paper 6.2.2, VIII. Int. Conf. Phen. Ionized Gases [1967].

¹⁴ H. HÜGEL, Z. Flugwiss. 16, 152 [1968].

führen, die eine Realisierung des eigenmagnetischen Effekts erbringen und seine Wirksamkeit bei der Geschwindigkeitsbildung erkennen lassen.

2. Theoretische Untersuchungen

Die theoretischen Untersuchungen sollen im magnetogasdynamischen Einflüssigkeitsmodell und in eindimensionaler Näherung erfolgen.

Arbeiten, die sich innerhalb dieses Rahmens mit kompressiblen Plasmaströmungen in Kanälen unter dem Einfluß elektromagnetischer Felder befassen, sind seit geraumer Zeit bekannt¹⁵⁻¹⁸, um nur einige zu nennen. Die charakteristischen Merkmale der dort behandelten Konfigurationen sind senkrecht aufeinanderstehende magnetische und elektrische Felder und üblicherweise ein Rechteckquerschnitt des Kanals. Die Aufgabenstellung besteht allgemein in einer Beschreibung der Strömungsvorgänge als Funktion zweier unabhängig voneinander vorgegebener elektromagnetischer Größen sowie der in Strömungsrichtung weisenden Ortskoordinate.

In der vorliegenden Arbeit wird der Versuch unternommen, die Strömungsvorgänge längs eines Kanals mit beliebigem Querschnittsverlauf zu beschreiben, wenn sowohl das elektrische als auch das magnetische Feld ausschließlich vom Strom einer Lichtbogenentladung herrühren. Die Stromstärke I wird dabei als die einzige für elektromagnetische Effekte maßgebliche Größe vorgegeben. Dem Wesen von Bogenentladungen entsprechend werden Kanäle mit Kreisquerschnitt betrachtet, weshalb Zylinderkoordinaten (r, φ, z) Anwendung finden und Rotations-symmetrie ($\partial/\partial\varphi=0$) vorausgesetzt wird. — Ähnliche Voraussetzungen werden in¹⁹ getroffen.

2.1. Annahmen und Grundgleichungen

Die auf Grund der elektrischen Leitfähigkeit des Plasmas bestehende Koppelung von Strömungs- und Magnetfeld bedingt bei einer exakten Beschreibung des Strömungsvorganges einen großen mathematischen Aufwand. In Fällen mit entweder starker oder schwacher Wechselwirkung kann es daher angezeigt sein, bei deren Charakterisierung Näherungen zu be-gehen²⁰. Liegen etwa Verhältnisse vor, wo die elektrische Leitfähigkeit eines Plasmas relativ gering und

damit das induzierte Magnetfeld klein gegenüber dem angelegten ist, so ermöglicht dies eine Entkopplung von Strömungs- und Magnetfeld. In der Näherung, die also kleine magnetische Reynolds-Zahlen voraussetzt, wird wohl der Einfluß des Magnetfeldes auf die Strömung, nicht aber deren Rückwirkung auf das Magnetfeld berücksichtigt. Die Vereinfachung besteht darin, daß dann das Magnetfeld dem angelegten gleich und als Funktion der Ortskoordinaten bekannt ist.

Auch in unserem Falle soll vorausgesetzt werden, daß die magnetische Reynolds-Zahl der Strömung klein gegenüber eins ist. Da hier die Stromstärke als primär angelegte Größe gilt, muß sowohl die in Abb. 1 angedeutete Stromstärkeveränderung längs des Anodenringes als auch die Stromdichteverteilung in dem Querschnitt des Kanals bekannt sein. Über das Induktionsgesetz ergibt sich daraus das angelegte Magnetfeld.

Im Rahmen des verwendeten theoretischen Modells können einige interessante Aspekte der Plasmaphysik nicht berücksichtigt werden. So ist davon auszugehen, daß an dem Ort, wo die theoretische Beschreibung des Strömungsvorganges beginnt, $z=0$ in Abb. 1, bereits ein Plasma mit bestimmten Eigenschaften vorhanden ist. Auch kann der Einfluß von Elektrodenphänomenen nicht erfaßt werden. Dazu wird angenommen, daß einmal die Ausdehnung des Anodenfallgebietes verschwindend klein gegenüber dem Kanalradius ist, zum anderen der Ursprung des Koordinatensystems hinreichend weit vor der Kathode liegt.

Weiterhin seien folgende Annahmen getroffen:

1. Es herrscht Stationarität $\partial/\partial t=0$.
2. Das Plasma ist ein ideales Gas mit konstantem Verhältnis der spezifischen Wärme γ und konstantem Ionisationsgrad.
3. Die elektrische Leitfähigkeit σ hat einen konstanten Wert und ist eine skalare Größe. Letzteres bedeutet, daß die Stoßfrequenz zwischen Elektronen und Ionen groß gegenüber der Gyrationfrequenz der Elektronen ist, daß also Hall-Effekte vernachlässigt werden.
4. Einflüsse von Wärmeleitung und viskoser Reibung werden nicht berücksichtigt.
5. Die Strömungsparameter sind konstant über dem Radius, $\partial/\partial r=0$. Da diese Annahme auf experimentelle Gegebenheiten kaum zutrifft, hat man

¹⁵ E. L. RESLER u. W. R. SEARS, J. Aero. Sci. **25**, 235 [1958].

¹⁶ E. DAHLBERG, Quart. Appl. Math. **19**, 177 [1961].

¹⁷ PAI SHIH-I, ARL 63-175, Part III [1965].

¹⁸ E. REBHAN, Z. Naturforsch. **20 a**, 1019 [1965].

¹⁹ G. M. BAM-ZELIKOWITSCH, Mitt. Akademie d. Wiss. SSSR, Mech. und Maschinenbau, Nr. 5 [1964].

²⁰ J. A. SHERCLIFF, A Textbook of Magnetohydrodynamics, Pergamon Press, Oxford 1965.

sich mit einer sogen. quasi-eindimensionalen Betrachtung zu behelfen. Diese beruht darin, daß in die „streng“-eindimensionalen Beziehungen entsprechend gebildete Mittelwerte über dem Querschnitt F bei festgehaltenem z , $\bar{g} = (1/F) \int_F g(r) dF$, eingesetzt werden. Da die radialen Variationen der Größen $g(r, z)$ im allgemeinen nicht bekannt sind, wären darüber Annahmen zu treffen, die dann dem wahren Sachverhalt mehr oder weniger entsprechen könnten. Ferner ist ein erhöhter mathematischer Aufwand bei konsequenter Rechnung mit Mittelwerten unvermeidlich, da z. B. beachtet werden muß, daß $\bar{g}_1 \bar{g}_2 \neq \overline{g_1 g_2}$ ist. Aus diesen Gründen erscheint die hier getroffene Annahme $\partial g / \partial r = 0$ für eine eindimensionale Analyse gerechtfertigt. Auch soll nicht unterschieden werden, ob es sich bei g um einen tatsächlichen Mittelwert (z. B. den Druck) oder um eine als konstant angenommene Größe (z. B. die Geschwindigkeit) handelt.

6. Die elektrische Stromdichte wird näherungsweise ihrer Axialkomponente gleichgesetzt und diese als konstant über dem Querschnitt angenommen.

Das zur Beschreibung des vorliegenden Problems erforderliche System von Grundgleichungen lautet:

$$p = R_p \varrho T = a^2 \varrho / \gamma, \quad (1)$$

$$\operatorname{div}(\varrho \mathbf{w}) = 0, \quad (2)$$

$$\varrho(\mathbf{w} \operatorname{grad}) \mathbf{w} = -\operatorname{grad} p + (\mathbf{j} \times \mathbf{B}), \quad (3)$$

$$\varrho(\mathbf{w} \operatorname{grad}) h^0 = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \quad (4)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (5)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (6)$$

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{w} \times \mathbf{B}). \quad (7)$$

Darin bedeuten p = Druck, R_p = Gaskonstante, ϱ = Dichte, T = Temperatur, a = Schallgeschwindigkeit (in Abwesenheit von \mathbf{B}), \mathbf{w} = Geschwindigkeit, \mathbf{j} = Stromdichte, \mathbf{B} = magnetische Induktion, h^0 = Stauenthalpie, \mathbf{E} = elektrische Feldstärke, μ_0 = magnetische Permeabilität.

2.2. Eigenmagnetische Kräfte und Differentialgleichungen der quasi-eindimensionalen Strömung

Im Falle eindimensionaler Strömung führen die radialen Komponenten der Kräfte zum Aufbau eines Druckberges über dem Querschnitt, während die axialen eine Impulsstromänderung in Strömungsrichtung bewirken. Dies wird durch die Darstellung von Gl. (3) in Komponentenschreibweise verdeut-

licht, woraus mit $\mathbf{w} = (0, 0, w)$, $\mathbf{B} = (0, B, 0)$ und

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \operatorname{grad}) (\mathbf{B} / \mu_0) - \operatorname{grad} (B^2 / 2 \mu_0),$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{B^2}{\mu_0 r} - \frac{1}{2 \mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial r}, \quad (8)$$

$$\varrho w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{2 \mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial z} \quad (9)$$

folgt.

Mit Gl. (6) erbringt die Integration von Gl. (8) den radialen Druckverlauf im Kanalquerschnitt an einer bestimmten Stelle z zu

$$p(r) = p_R + \frac{\mu_0}{4} j^2 (R^2 - r^2). \quad (10)$$

Darin bezeichnet R den Kanalradius und p_R den Druck an der Kanalwand. In unserer eindimensionalen Analyse ist dann unter dem Druck p der Mittelwert

$$\bar{p} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R p(r) 2 \pi r dr = p_R + \frac{\mu_0}{8 \pi} \frac{j^2}{F} \quad (11)$$

zu verstehen.

Die zur Ausbildung einer axialen Kraftkomponente erforderliche radiale Stromdichte resultiert aus der Veränderung des Querschnitts und/oder der Stromstärke längs z . Die axiale Kraft wird nur vom Gradienten des magnetischen Druckes $B^2 / 2 \mu_0$ gebildet. Ihre Ableitung kann entweder mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes, der auf ein Kontrollvolumen angewandt wird, oder durch Bildung eines Mittelwertes über dem Querschnitt des magnetischen Druckgradienten erfolgen²¹. Für die mittlere pro Volumeneinheit wirkende Kraft erhält man den Ausdruck

$$k = \frac{\mu_0}{8 \pi} \frac{j^2}{F} \left(\frac{1}{F} \frac{dF}{dz} - \frac{1}{J} \frac{dJ}{dz} \right), \quad (12)$$

der für gegebene $J(z)$ und $F(z)$ eine reine Funktion der Ortskoordinate ist.

Definiert man einen mittleren magnetischen Druck entsprechend

$$\frac{\bar{B}^2}{2 \mu_0} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \frac{1}{2 \mu_0} B^2(r) 2 \pi r dr = \frac{\mu_0}{16 \pi} \frac{j^2}{F} \quad (13)$$

und eliminiert mit Hilfe dieses Ausdrucks die Stromstärke in Gl. (12), so folgt für die Kraft die Beziehung

$$k = \frac{\bar{B}^2}{2 \mu_0} \frac{1}{F} \frac{dF}{dz} - \frac{1}{2 \mu_0} \frac{d\bar{B}^2}{dz}. \quad (14)$$

²¹ H. HÜGEL, DLR FB 70-13 [1970].

Gegenüber dem Fall mit gekreuzten Feldern tritt bei der Eigenmagnetik der Term $\frac{B^2}{2\mu_0} \frac{1}{F} \frac{dF}{dz}$ auf, welcher dem Umstand Rechnung trägt, daß das Magnetfeld hier eine Funktion auch des Kanalquerschnitts ist.

Mit der in Abb. 1 gezeigten Elektrodenanordnung, die im Kanal nur $dJ/dz \leq 0$ zuläßt, ergibt sich eine positive Axialkomponente bei einer

Querschnittserweiterung und konstanter Stromstärke,
Stromstärkeabnahme und konstantem Querschnitt,
Querschnittserweiterung und Stromstärkeabnahme,
Stromstärkeabnahme und Querschnittsverengung,

solange $\frac{1}{F} \frac{dF}{dz} < \frac{1}{J} \frac{dJ}{dz}$ ist.

Eine negative Kraft tritt auf bei einer

Querschnittsverengung und konstanter Stromstärke,
Querschnittsverengung und Stromstärkeabnahme,

wenn $\frac{1}{J} \frac{dJ}{dz} < \frac{1}{F} \frac{dF}{dz}$ ist.

Experimentelle Beispiele, wo bei konstanter Stromstärke eine Querschnittserweiterung eine positive, eine Verengung eine negative axiale Kraft bewirkt, sind bereits in ⁴ angeführt.

Mit Kenntnis der eigenmagnetischen Kräfte kann nun der Strömungsvorgang als Funktion der Ortskoordinate z beschrieben werden. Dies soll an Hand der in der Magnetogasdynamik üblichen Parameter

Geschwindigkeit, Mach-Zahl, Druck, Dichte und Temperatur erfolgen.

Durch logarithmisches Differenzieren erhält man aus Gl. (1)

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dz} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} = 0. \quad (15)$$

Auf dieselbe Weise folgt aus der Kontinuitätsgleichung bei Beachtung eines konstanten Massenflusses $\dot{m} = \rho w F$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} + \frac{1}{w} \frac{dw}{dz} + \frac{1}{F} \frac{dF}{dz} = 0. \quad (16)$$

Da voraussetzungsgemäß eine über dem Querschnitt konstante Geschwindigkeit vorliegt, reduziert sich die Impulsgleichung unter Berücksichtigung von Gl. (11) und (12) zu

$$\rho w \frac{dw}{dz} = - \frac{dp}{dz} + \frac{\mu_0}{8\pi} \frac{J^2}{F} \left(\frac{1}{F} \frac{dF}{dz} - \frac{1}{J} \frac{dJ}{dz} \right). \quad (17)$$

Nach Eliminieren der Feldstärke mittels des Ohmschen Gesetzes und bei Verwendung der Beziehung

$$\frac{dh^0}{dz} = \frac{d}{dz} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} \right) \quad (18)$$

lautet die Energiegleichung

$$\rho w \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} - \frac{p}{\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \right) + \rho w^2 \frac{dw}{dz} = \frac{J^2}{F^2 \sigma} + w \frac{\mu_0}{8\pi} \frac{J^2}{F} \left(\frac{1}{F} \frac{dF}{dz} - \frac{1}{J} \frac{dJ}{dz} \right). \quad (19)$$

Nach Einführen der Mach-Zahl

$$M = w/a \quad (20)$$

stehen nun für die Berechnung der fünf unbekannten Strömungsparameter w , M , p , ρ und T ebenso viele Gleichungen zur Verfügung. Daraus ergeben sich schließlich die folgenden Beziehungen:

$$\frac{1}{w} \frac{dw}{dz} = \frac{1}{1-M^2} \left\{ - \frac{1}{F} \frac{dF}{dz} + \frac{1}{\gamma p w} \left[\frac{J^2}{F^2 \sigma} (\gamma-1) - w \frac{\mu_0}{8\pi} \frac{J^2}{F} \left(\frac{1}{F} \frac{dF}{dz} - \frac{1}{J} \frac{dJ}{dz} \right) \right] \right\}, \quad (21.1)$$

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dz} = \frac{1}{1-M^2} \left\{ - \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \frac{1}{F} \frac{dF}{dz} + \frac{1}{2\gamma p w} \left[\frac{J^2}{F^2 \sigma} (\gamma-1) (1 + \gamma M^2) - w (\gamma+1) \frac{\mu_0}{8\pi} \frac{J^2}{F} \left(\frac{1}{F} \frac{dF}{dz} - \frac{1}{J} \frac{dJ}{dz} \right) \right] \right\}, \quad (21.2)$$

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dz} = \frac{1}{1-M^2} \left\{ \gamma M^2 \frac{1}{F} \frac{dF}{dz} - \frac{1}{p w} \left[\frac{J^2}{F^2 \sigma} (\gamma-1) M^2 - w \frac{\mu_0}{8\pi} \frac{J^2}{F} \left(\frac{1}{F} \frac{dF}{dz} - \frac{1}{J} \frac{dJ}{dz} \right) \right] \right\}, \quad (21.3)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} = \frac{1}{1-M^2} \left\{ M^2 \frac{1}{F} \frac{dF}{dz} - \frac{1}{\gamma p w} \left[\frac{J^2}{F^2 \sigma} (\gamma-1) - w \frac{\mu_0}{8\pi} \frac{J^2}{F} \left(\frac{1}{F} \frac{dF}{dz} - \frac{1}{J} \frac{dJ}{dz} \right) \right] \right\}, \quad (21.4)$$

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dz} = \frac{1}{1-M^2} \left\{ (\gamma-1) M^2 \frac{1}{F} \frac{dF}{dz} + \frac{\gamma-1}{\gamma p w} \left[\frac{J^2}{F^2 \sigma} (1 - \gamma M^2) + w \frac{\mu_0}{8\pi} \frac{J^2}{F} \left(\frac{1}{F} \frac{dF}{dz} - \frac{1}{J} \frac{dJ}{dz} \right) \right] \right\}. \quad (21.5)$$

Diese Gleichungen, für $+dF/dz$ und $+dJ/dz$ abgeleitet, sind bei Beachtung der entsprechenden Vorzeichen für beliebige Änderungen der Querschnittsfläche und der Stromstärke gültig.

Von dem entsprechenden Gleichungssystem der Gasdynamik ²² unterscheiden sich die obigen Ausdrücke nur durch den zweiten Term in der eckigen Klammer,

welcher den Einfluß der eigenmagnetischen Kräfte beschreibt. Die Wirkung der Jouleschen Wärme hingegen entspricht den bekannten Effekten der Wärmezufuhr in einer Kanalströmung. Mit verschwindender Stromstärke geht Gleichungssystem (21) selbstverständlich in die Beziehungen für isentrope Kanalströmung über.

²² K. OSWATITSCH, Gasdynamik, Springer-Verlag, Wien 1952.

2.3. Diskussion

Wie Gl. (21.1) zeigt, kann ein kompressibles Plasma durch positive Kräfte nur dann *direkt beschleunigt* werden, wenn ein Strömungszustand mit $M > 1$ vorliegt. Wohl bewirkt eine positive Kraft immer eine Erhöhung des Impulsstromes, doch *wie* sich *Geschwindigkeit und/oder Druck* ändern, wird erst durch Hinzunahme einer weiteren Beziehung zur Impuls-, Kontinuitäts- und Zustandsgleichung bestimmt. Den allgemeinsten Fall stellt die Verwendung der Energiegleichung dar, wobei der in Gl. (21) verdeutlichte Einfluß der Mach-Zahl erscheint.

Anders liegen die Verhältnisse, wenn an Stelle der Energiegleichung in ihrer allgemeinen Form eine Beziehung tritt, die eine bestimmte Zustandsänderung des Plasmas vorschreibt. Soll der Strömungsvorgang z. B. isobar verlaufen, so kann sich die Impulsstromzunahme auf Grund einer positiven Kraft ausschließlich in einer Erhöhung der Geschwindigkeit auswirken; die Größe der Mach-Zahl ist ohne Bedeutung für das Vorzeichen von dw/dz . Ähnliches gilt, wenn ein bestimmter Druckverlauf längs z verlangt wird. Setzt man $p_R = \text{const}$, so läßt sich ein mittlerer Druckgradient als Funktion von z bilden. Damit wird die Impulsgleichung unter Verwendung der Kontinuitätsbeziehung analytisch integrierbar. Mit den Grenzen (J_1, F_1) und $(0, F_2)$ folgt das Ergebnis

$$\dot{m}(w_2 - w_1) = \frac{\mu_0 J_1^2}{4\pi} \left[\frac{3}{4} + \ln(R_2/R_1) \right],$$

welches bereits aus der integralen Behandlung des eigenmagnetischen Effekts bekannt ist⁶.

Zur weiteren Diskussion werden einige dimensionslose Größen eingeführt, deren Vorteil gegenüber anderen Kennzahlen darin liegt, daß sie vorzeichenbehaftet sind und dadurch mehr Information vermitteln:

$$1. \quad \zeta = z/L \quad (22)$$

ist eine auf die Kanallänge bezogene Koordinate in Strömungsrichtung.

$$2. \quad N_p = k/(p/L). \quad (23)$$

Durch N_p werden die je Volumeneinheit auftretenden elektromagnetischen mit den gaskinetischen Kräften verglichen. Zur Cowling-Zahl $B^2/\rho w^2$, welche das Verhältnis von magnetischem zu dynamischem Druck angibt, besteht die Beziehung

$$N_p = Co \gamma M^2 f_c, \quad (24)$$

worin f_c die Änderung von Fläche und Stromstärke längs ζ entsprechend

$$f_c = \frac{1}{F} \frac{dF}{d\zeta} - \frac{1}{J} \frac{dJ}{d\zeta} \quad (25)$$

beschreibt.

$$3. \quad N_K = \frac{p}{k} \frac{1}{F} \frac{dF}{d\zeta} = \frac{1}{N_p} \frac{1}{F} \frac{dF}{d\zeta}. \quad (26)$$

Hier wird jene Kraft, die sich durch Abstützen des gaskinetischen Druckes am Kegelstumpfmantel eines Volumenelements ergibt, mit der darin wirkenden eigenmagnetischen Axialkraft verglichen. Anschaulich kann N_K als das Verhältnis von aerodynamischer zu elektromagnetischer Schubzeugung in einer Düse verstanden werden.

$$4. \quad N_E = (j^2/\sigma)/w k. \quad (27)$$

Dieser Parameter gibt das Verhältnis der pro Zeit- und Volumeneinheit auftretenden Energieformen an. Zwischen N_E und der magnetischen Reynolds-Zahl

$$Rm = \mu_0 \sigma w L$$

besteht der Zusammenhang

$$N_E = \frac{1}{Rm} \frac{8}{f_c} \left(\frac{L}{R} \right)^2. \quad (28)$$

Unter Verwendung obiger Kennzahlen nimmt das Gleichungssystem (21) die nachstehende Form an:

$$\frac{1}{w} \frac{dw}{d\zeta} = \frac{1}{1-M^2} \frac{N_p}{\gamma} [-\gamma N_K + (\gamma-1) N_E - 1], \quad (29.1)$$

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{d\zeta} = \frac{1}{1-M^2} \frac{N_p}{\gamma} \frac{\gamma+1}{2} \left[-\frac{2+(\gamma-1)M^2}{1+\gamma} \gamma N_K + \frac{1+\gamma M^2}{1+\gamma} (\gamma-1) N_E - 1 \right], \quad (29.2)$$

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{d\zeta} = \frac{1}{1-M^2} N_p [\gamma M^2 N_K - (\gamma-1) M^2 N_E + 1], \quad (29.3)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\zeta} = \frac{1}{1-M^2} \frac{N_p}{\gamma} [\gamma M^2 N_K - (\gamma-1) N_E + 1], \quad (29.4)$$

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{d\zeta} = \frac{1}{1-M^2} \frac{N_p}{\gamma} (\gamma-1) [\gamma M^2 N_K + (1-\gamma M^2) N_E + 1]. \quad (29.5)$$

Im Hinblick auf die im Experiment zu realisierende Beschleunigung des Plasmas durch eigenmagnetische Kräfte interessieren vor allem Parameterbereiche, welche zu Strömungsverhältnissen mit Geschwindigkeits- und Mach-Zahlzuwachs führen. Wird die Diskussion auf positive Kräfte (Impulsstromzunahme) beschränkt, so haben N_p und N_E nur positive, N_K dagegen positive oder negative (entsprechend $dF/d\zeta \geq 0$) Werte. Ein positives Vorzeichen von $dw/d\zeta$ bzw. $dM/d\zeta$ tritt auf, wenn die Klammerausdrücke in Gl. (29.1) bzw. (29.2), die mit g_w bzw. g_M bezeichnet seien, positiv sind für $M < 1$ und negativ sind für $M > 1$.

In den Abb. 2 bzw. 3 werden die Parameterbereiche $g_w(M, N_K, N_E)$ bzw. $g_M(M, N_K, N_E)$, die zu

$dw/d\zeta > 0$ bzw. $dM/d\zeta > 0$ führen, als räumliche Gebilde dargestellt. Der Schnitt mit der Ebene $N_K = 0$ (Rohr) ist durch Schraffur hervorgehoben. Die davor liegenden, strichpunktiert angedeuteten Bereiche

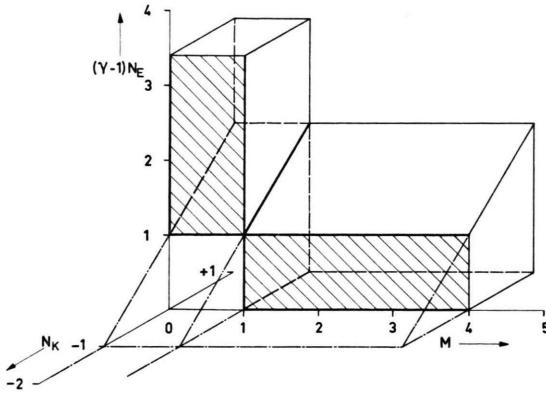


Abb. 2. Parameterbereiche für beschleunigte Strömungen in Kanälen veränderlichen Querschnitts; durch Schraffur hervorgehobene Flächen kennzeichnen Rohrströmungen.

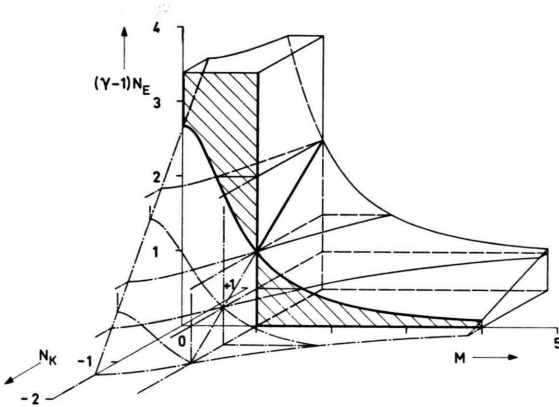


Abb. 3. Parameterbereiche für Strömungen mit Mach-Zahlzuwachs in Kanälen veränderlichen Querschnitts; durch Schraffur hervorgehobene Flächen kennzeichnen Rohrströmungen.

lassen erkennen, daß auch in konvergierenden Kanälen Unter- wie auch Überschallströmungen auftreten können. Die gemeinsame Berührungskante der Gebilde bei $M = 1$ folgt der Beziehung

$$N_{Ekw} = \frac{1 + \gamma N_K}{\gamma - 1}, \quad (30)$$

welche aus der Bedingung $g_w = g_M = 0$ resultiert. Ein Vergleich von Abb. 2 und 3 verdeutlicht, daß bei $dM/d\zeta > 0$ immer auch $dw/d\zeta > 0$ ist, während umgekehrt sowohl für $M < 1$ als auch $M > 1$ Verhältnisse möglich sind, bei denen in einer beschleunigten Strömung die Mach-Zahl abnimmt.

Des weiteren zeigen Gleichungssystem (29) und die Abb. 2 und 3, daß verschiedene Strömungsfälle auftreten können, die durch den jeweiligen Verlauf der Funktionen g_w und g_M sowie der Mach-Zahl charakterisierbar sind.

2.3.1. Rohrströmungen

Da $N_K = 0$ ist, vereinfacht sich Gleichungssystem (29) beträchtlich. Der prinzipielle Aufbau der Gleichungen bleibt jedoch erhalten (Terme mit verschiedenen Vorzeichen in der Klammer), weswegen die Diskussion der oben angedeuteten Strömungstypen unter der sich hier bietenden Vereinfachung erfolgen kann. Weiterhin lassen sich an Hand der Rohrströmung vergleichende Betrachtungen mit aus der Literatur bekannten Strömungen in gekreuzten Feldern übersichtlicher durchführen.

Der in Gl. (30) definierten Größe N_{Ekw} entspricht eine „kritische“ magnetische Reynolds-Zahl, welche bei konstanter elektrischer Leitfähigkeit auf eine „kritische“ Geschwindigkeit (in Anlehnung an ¹⁵ so bezeichnet) von

$$w_{kw} = -(\gamma - 1) 8 \left(\frac{L}{R} \right)^2 \frac{j/\sigma}{\mu_0 L (dj/d\zeta)} \quad (31)$$

zurückführbar ist. Dieser Ausdruck zeigt, daß w_{kw} dem Verhältnis einer elektrischen Feldstärke, $E \sim j/\sigma$, zu einer magnetischen Induktion, $B \sim \mu_0 L (dj/d\zeta)$, proportional ist. Es tritt hier also der gleiche physikalische Zusammenhang wie bei Strömungen in gekreuzten Feldern auf ¹⁵.

Für einen Stromstärkeverlauf, wo $j/(dj/d\zeta)$ mit $\zeta \rightarrow 1$ stetig gegen Null geht, kann gezeigt werden ²¹, daß g_w von positiven Werten bei $\zeta = 0$ stetig abnimmt, bei ζ_{kw} ($w = w_{kw}$) durch Null geht und negativ wird. Die „kritische“ Geschwindigkeit wird dabei im allgemeinen eine Funktion auch von ζ sein. Hat allerdings die elektrische Leitfähigkeit sehr hohe Werte, so daß $N_E \ll 1$, dann wird $g_w < 0$ im ganzen Rohr sein. — Ein ähnliches Verhalten ergibt sich für g_M .

Damit sind folgende Strömungsfälle unterscheidbar, deren qualitativer Mach-Zahlverlauf in Abb. 4 gezeigt wird:

1. Die Funktionen g_w und g_M nehmen von positiven Werten am Rohranfang stetig ab, wobei sich die Mach-Zahl ändert. Wird simultan mit $g_w = g_M = 0$ die Mach-Zahl $M = 1$ erreicht [für $M = 1$ sind sämtliche Klammerausdrücke in Gl. (29) identisch], dann kann ein kontinuierlicher Übergang von Unter- nach

Überschall, oder umgekehrt, erfolgen. In Abb. 4 sind diese Fälle mit 1 gekennzeichnet.

2. Die Größen g_w und g_M nehmen von positiven Werten bei $\zeta = 0$ stetig ab und gehen durch den Wert Null, während die Mach-Zahl verschieden von eins ist. Ein Vorzeichenwechsel von $dw/d\zeta$ und $dM/d\zeta$ ist die Folge, Kurven 2 in Abb. 4. Da für $M \neq 1$ die Funktionen g_w , g_M , usw., nicht identisch sind, tritt dieser für die einzelnen Strömungsparameter an verschiedenen Stellen auf. Zwischen w_{kw} und der durch $g_M = 0$ (bei ζ_{kM}) bestimmten Größe w_{kM} besteht der Zusammenhang

$$w_{kM} = w_{kw} \frac{1 + \gamma M^2}{1 - \gamma} \quad (32)$$

Daraus folgt, daß $\zeta_{kM} < \zeta_{kw}$ für $M < 1$ und $\zeta_{kM} > \zeta_{kw}$ für $M > 1$ (vgl. Abb. 2 und 3).

3. Erreicht eine Strömung von Unter- oder Überschall kommend die Mach-Zahl eins und sind dabei die Funktionen g_w , $g_M > 0$, so brechen die Lösungen bei $M = 1$ mit Gradienten $d/d\zeta = \pm \infty$ ab. Es existieren jeweils nur beschleunigte Unter- oder verzögerte Überschallströmungen, Kurven 3 in Abb. 4 ("choking").

4. Haben die Funktionen g_w , g_M nur negative Werte, so entfernt sich die Mach-Zahl während des Strömungsverlaufes immer mehr vom Wert eins. Ist am Rohranfang $M < 1$, so wird die Strömung unter Mach-Zahlabnahme und Druckanstieg verzögert, ist dort $M > 1$, so erfolgt eine Beschleunigung mit Mach-Zahlerhöhung und Druckabfall, Kurven 4 in Abb. 4.

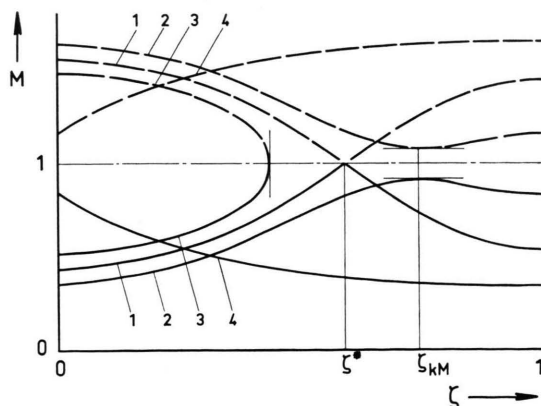


Abb. 4. Typische Formen des Mach-Zahlverlaufes in einem Rohr unter dem Einfluß eigenmagnetischer axialer Kräfte und Joulescher Heizung.

Zwei weitere Strömungstypen, die gekennzeichnet werden durch einen Verlauf von g_w und g_M von negativen nach positiven Werten mit Mach-Zahlen jeweils nur

kleiner oder größer als eins, sowie den trivialen Verlauf $g_w = g_M = 0$ im gesamten Rohr, sind praktisch bedeutungslos.

In der Literatur über gekreuzte Felder werden charakteristische Typen der Rohrströmung häufig in der Mach-Zahl-Geschwindigkeits-Ebene dargestellt. Voraussetzung dafür ist ein längs ζ konstantes Verhältnis E/B , da dann w_{kw} unabhängig von ζ wird. Soll diese Darstellungsweise auch hier Anwendung finden, so muß entsprechend Gl. (31) eine ganz bestimmte Stromstärkevariation längs des Kanals vorliegen, nämlich

$$J = J_0 e^{-\zeta/c}, \quad (33)$$

worin c das als konstant angenommene Verhältnis von $(j/\sigma)/[\mu_0 L(dj/d\zeta)]$ bedeutet. Die Stromstärke hat also bei $\zeta = 1$ einen von Null verschiedenen Wert. In Abb. 5 sind die durch w_{kw} und w_{kM} begrenzten Bereiche typischer Strömungsformen graphisch wiedergegeben. Die ersten drei der charakteristischen Strömungsvorgänge sind durch Pfeile, deren Spitzen in Strömungsrichtung weisen, qualitativ verdeutlicht. Bei dem zweiten Typ tritt hier jedoch wegen $w_{kw} = \text{const}$ kein Vorzeichenwechsel von $dw/d\zeta$ auf, vgl. 15.

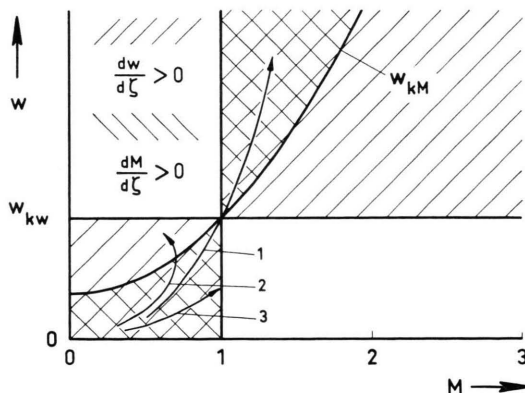


Abb. 5. Typische Strömungsvorgänge in einem Rohr für einen Stromstärkeverlauf $J_0 e^{-\zeta/c}$.

Für Verhältnisse mit voneinander unabhängig vorgegebenen elektrischen und magnetischen Feldern gelangt eine weitere kritische Geschwindigkeit bei der Festlegung von Bereichen typischer Strömungsvorgänge zur Geltung. Dieser Unterschied zu dem hier behandelten Fall liegt in der verschiedenen Problemstellung begründet. Dort ist die Größe und Richtung des resultierenden elektrischen Feldes, und damit auch die der Stromdichte und Kraft, über $\mathbf{w} \times \mathbf{B}$ eine Funktion der Geschwindigkeit. Die betreffende kritische Geschwindigkeit ist durch das Verschwinden der Stromdichte im Kanal gekennzeichnet, was dann eintritt, wenn die induzierte Feldstärke entgegengesetzt gleich groß der an-

trag, so wechselt die Stromdichte ihr Vorzeichen und die Richtung der elektromagnetischen Kraft kehrt sich um. In einer Lichtbogenentladung bei vorgegebener Stromstärke kann ein derartige Umkehr nicht erfolgen. Tritt eine der angelegten Feldstärke entgegenwirkende induzierte auf, dann erhöht sich die Bogen-spannung, so daß $\mathbf{w} \times \mathbf{B}$ kompensiert wird und der Strom fließen kann.

2.3.2. Stetiger sonischer Durchgang

Hier wird gezeigt, welchen Bedingungen die Strömungsparameter an dieser Stelle unterliegen, bzw. wie deren Gradienten zu berechnen sind, wenn im Differentialgleichungssystem Zähler und Nenner simultan den Wert Null annehmen. Die mathematische Behandlung, für alle Größen prinzipiell gleich, wird an Hand von Geschwindigkeit, Mach-Zahl und Druck demonstriert.

Die Überlegungen seien für eine beliebige Kanalform $F(\zeta)$ und Stromstärkeänderung $J(\zeta)$ angestellt. Die Stelle $\zeta = \zeta^*$ (* soll den stetigen sonischen Durchgang kennzeichnen) sei bekannt. Aus der Bedingung $g_w = g_M = g_p = 0$ folgt die entsprechende „kritische“ Geschwindigkeit

$$w^* = \frac{(\gamma-1) (J^*/F^*)^2 L}{\sigma [k^* L + \gamma p^* (1/F^*) (dF/d\zeta)^*]} \quad (34)$$

Im Gegensatz zur Rohrströmung hängt für $dF/d\zeta \neq 0$ w_{kw} auch vom Druck ab. Dieser ist bei vorgegebenem Massenfluß \dot{m} wegen $w^* = a$ mit

$$p^* = \dot{m} w^* / \gamma F^* \quad (35)$$

eindeutig bestimmt. Damit ergibt sich für w^* eine quadratische Gleichung mit der positiven Wurzel

$$w^* = - \frac{k^* F^* L}{2 \dot{m} (1/F^*) (dF/d\zeta)^*} + \sqrt{\left[\frac{k^* F^* L}{2 \dot{m} (1/F^*) (dF/d\zeta)^*} \right]^2 + \frac{(\gamma-1) J^{*2} L}{\sigma \dot{m} (dF/d\zeta)^*}} \quad (36)$$

Werden die Gln. (29.1) bis (29.3) in die Form

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{1}{1-M^2} \frac{N_p}{\gamma} w g_w, \quad (37.1)$$

usw., gebracht und wird auf deren rechte Seite die Regel von de L'Hospital angewandt, so folgt unter Beachtung von

$g_w = g_M = g_p = 0$ sowie $N_E^* = (1 + \gamma N_K^*) / (\gamma - 1)$ daraus schließlich

$$2 \left(\frac{dM}{d\zeta} \right)^{*2} + \left(\frac{dM}{d\zeta} \right)^* N_p^* (N_K^* + 1) + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \cdot N_p^* \left[(\gamma-1) \left(\frac{dN_E}{d\zeta} \right)^* - \gamma \left(\frac{dN_K}{d\zeta} \right)^* \right] = 0, \quad (38)$$

$$2 \gamma \left(\frac{dw}{d\zeta} \right)^* \left(\frac{dM}{d\zeta} \right)^* + w^* N_p^* \left[(\gamma-1) \left(\frac{dN_E}{d\zeta} \right)^* - \gamma \left(\frac{dN_K}{d\zeta} \right)^* \right] = 0, \quad (39)$$

$$2 \left(\frac{dM}{d\zeta} \right)^* \left[\left(\frac{dp}{d\zeta} \right)^* - p^* N_p^* \right] - p^* N_p^* \left[(\gamma-1) \left(\frac{dN_E}{d\zeta} \right)^* - \gamma \left(\frac{dN_K}{d\zeta} \right)^* \right] = 0. \quad (40)$$

Es stehen also für die Bestimmung der drei unbekannten Gradienten $(dw/d\zeta)^*$, $(dM/d\zeta)^*$ und $(dp/d\zeta)^*$ drei unabhängige Gleichungen zur Verfügung. Da Gl. (38) im allgemeinen zwei Wurzeln hat [Gleichungssystem (29) gilt sowohl für Unter- wie für Überschall, und der Durchgang im sonischen Punkt kann theoretisch in zwei Richtungen erfolgen], muß für den Fall stetiger Beschleunigung von Unter- nach Überschall die Bedingung

$$\frac{\gamma+1}{4\gamma} N_p^* \left[(\gamma-1) \left(\frac{dN_E}{d\zeta} \right)^* - \gamma \left(\frac{dN_K}{d\zeta} \right)^* \right] < \left[\frac{N_p^*}{4} (N_K^* + 1) \right]^2$$

erfüllt sein. Damit wird $(dM/d\zeta)^*$ reell und positiv, $(dw/d\zeta)^*$ ebenfalls positiv und $(dp/d\zeta)^*$ negativ. — Für den Sonderfall der Rohrströmung vereinfachen sich obige Formeln beträchtlich, da N_K den Wert Null hat.

2.4. Theoretische Ergebnisse

Die gekoppelten Differentialgleichungen werden durch numerische Integration nach einem Runge-Kutta-Verfahren auf einer Rechenmaschine vom Typ Siemens 4004/55 gelöst. Von einer größeren Anzahl gerechneter Beispiele²¹ seien hier nur Düsenströmungen angeführt.

Die den Rechnungen zugrunde gelegten Kanalformen sind der Düse, mit welcher die experimentellen Untersuchungen durchgeführt wurden (vgl. Abb. 11), in ihrem Querschnittsverlauf angepaßt. Durch

$$F(\zeta)_1 = \pi R_0^2 [1 + (R_e/R_0)^2 - 1] \zeta]$$

wird eine mit ζ linear zunehmende Querschnittsfläche beschrieben, während sich bei

$$F(\zeta)_2 = \pi R_0^2 [1 + (R_e/R_0 - 1) \zeta]^2$$

der Kanalradius linear ändert. In den Formeln bedeutet R_0 den Kanalradius am Anfang, R_e jenen am Ende der Düse.

Die folgenden Fälle des Stromstärkeverlaufes längs der Kanalachse werden für die Rechnungen herangezogen:

$$J(\zeta)_0 = J_0, \quad J(\zeta)_3 = J_0 \left[1 - \left(\frac{\zeta - \zeta_A}{1 - \zeta_A} \right) \right]_{\zeta_A < \zeta < 1},$$

$$J(\zeta)_1 = J_0(1 - \zeta), \quad J(\zeta)_4 = J_0 \left[1 - \left(\frac{\zeta - \zeta_A}{1 - \zeta_A} \right)^2 \right]_{\zeta_A < \zeta < 1},$$

$$J(\zeta)_2 = J_0(1 - \zeta^2), \quad J(\zeta)_5 = J_0 \left[1 - \left(\frac{\zeta - \zeta_A}{1 - \zeta_A} \right)^2 \right]_{\zeta_A < \zeta < 1}^2.$$

J_0 bezeichnet die Stromstärke am Düsenanfang, ζ_A die Ortskoordinate des Anodenanfangs. Der Fall $J(\zeta)_0 = J_0 = \text{const}$ ist so zu verstehen, daß die Kanalwand elektrisch neutral gehalten wird und sich eine Anode erst außerhalb der betrachteten Düse befindet. Um $J(\zeta)_1$ und $J(\zeta)_2$ zu realisieren, muß die gesamte Kanalwand, in einzelne Segmente unterteilt und mit entsprechenden Vorwiderständen versehen, an Anodenpotential liegen. Die Varianten $J(\zeta)_3$ bis $J(\zeta)_5$ hingegen sollen den experimentellen Verhältnissen, wo ein Teil der Düse elektrisch neutral gehalten wird und erst das letzte Düsensegment als Anode dient, etwas näherkommen.

2.4.1. Strömungen in divergierenden Düsen unter dem Einfluß eigenmagnetischer Kräfte ohne Joulesche Heizung

Eine Vernachlässigung der Jouleschen Wärme bei hohen Stromstärken bedeutet, daß sehr hohe Werte der elektrischen Leitfähigkeit vorliegen müssen. Damit ist aber die Voraussetzung kleiner magnetischer Reynolds-Zahlen nicht mehr erfüllt. Die Behandlung derartiger Fälle erscheint dennoch gerechtfertigt, da sich wegen des Verschwindens von j^2/σ einige Besonderheiten der elektromagnetischen Beschleunigung deutlich zeigen lassen.

Die Änderung der Geschwindigkeit unter dem Einfluß eigenmagnetischer Kräfte in einer Düse mit $R_0 = 8 \text{ mm}$, $R_e/R_0 = 5$ und $L = 65 \text{ mm}$ ist in Abb. 6

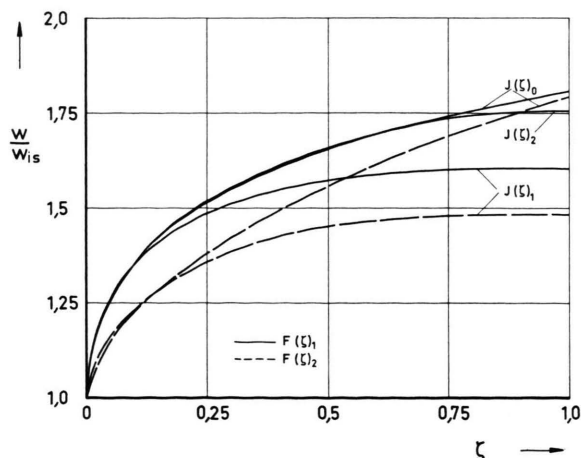


Abb. 6. Auf den isentropen Zustand bezogener Geschwindigkeitsverlauf in Düsen; $j^2/\sigma \rightarrow 0$.

graphisch wiedergegeben. Dabei wird der Strömungszustand an jeder Stelle mit jenem verglichen, der sich bei isentroper Entspannung von demselben Anfangszustand einstellt. Dieser ist mit $\dot{m} = 0,238 \text{ g/s}$, $p_0 = 26,6 \cdot 10^2 \text{ N/m}^2$, $M_0 = 1,001$ und $J_0 = 3000 \text{ A}$ festgelegt. Im Gegensatz zur Rohrströmung ergeben sich im Kanal veränderlichen Querschnitts für verschiedene Stromstärkevariationen voneinander abweichende Endzustände, weil die Kraft hier sowohl durch eine Änderung der Fläche wie der Stromstärke erzeugt wird. Dementsprechend führt auch die parabelförmige Düse zu stärkeren Änderungen der Strömungsparameter als die konische, da bei ersterer am Anfang des Kanals, wo die Stromstärke noch hoch ist, eine stärkere Zunahme der Fläche auftritt.

Den Einfluß der Stromstärke bei festgehaltenen Anfangsbedingungen auf den Strömungszustand am Ende der Düse zeigt Abb. 7, wobei die einzelnen Größen auf den isentropen Zustand bei $\zeta = 1$ bezogen sind. Den Rechnungen ist die Düsenform $F(\zeta)_1$ und die Stromstärkevariation $J(\zeta)_3$ zugrunde gelegt.

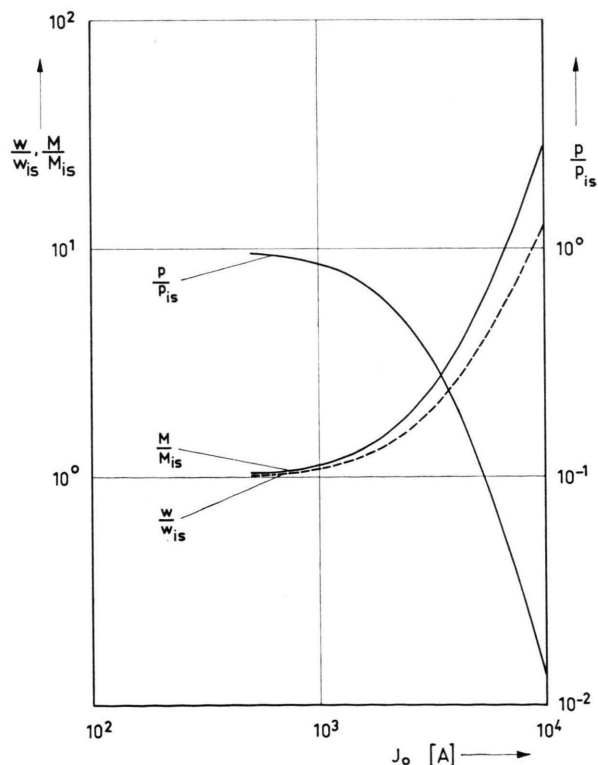


Abb. 7. Auf den isentropen Zustand bezogene Werte von Geschwindigkeit, Mach-Zahl und Druck am Düsenende in Abhängigkeit von der Stromstärke; $j^2/\sigma \rightarrow 0$.

Während die Mach-Zahl und die Geschwindigkeit mit höheren Stromstärken ansteigt, sinkt der Druck bemerkenswert stark ab.

Die den in Abb. 7 dargestellten Verhältnissen entsprechenden Absolutwerte der Geschwindigkeit w und der Geschwindigkeitszuwachs $(w - w_{is})$ gegenüber dem isentropen Strömungsfall ohne Kräfte sind in Abb. 8 wiedergegeben. Weiterhin ist die in-

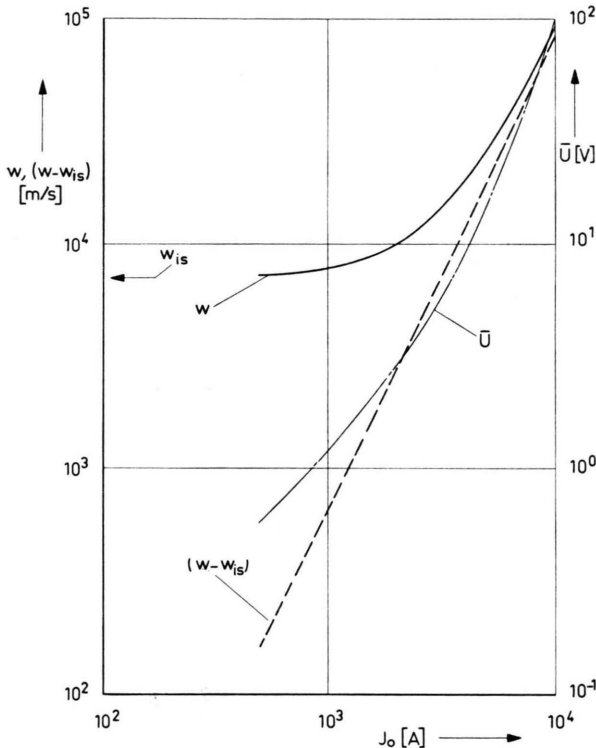


Abb. 8. Den Verhältnissen von Abb. 7 entsprechende absolute Werte der Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsdifferenz gegenüber isentropen Entspannung sowie die induzierte Spannung in Abhängigkeit von der Stromstärke; $j^2/\sigma \rightarrow 0$.

duzierte Spannung mit eingezeichnet, die für $\sigma \rightarrow \infty$ mit

$$\bar{U} = \frac{L}{J_0} \int_0^1 w k F d\zeta \quad (41)$$

berechnet werden kann. Da im Grenzfall sehr hoher Stromstärken die Geschwindigkeit dem Quadrat der Stromstärke proportional wird, folgt dann $\bar{U} \sim J_0^3$.

2.4.2. Strömungen in divergierender Düse unter dem Einfluß eigenmagnetischer Kräfte und Joulescher Heizung

Eine Berücksichtigung der Jouleschen Wärme wird in den meisten Fällen erforderlich sein, wo

ein theoretisch berechneter Strömungsverlauf mit einem experimentell verifizierten verglichen werden soll. Bei Werten der elektrischen Leitfähigkeit von der Größenordnung 10^3 bis 10^4 A/Vm, wie sie in unseren Experimenten auftreten, erfolgt die Energiezufuhr in überwiegendem Maße in Form von Joulescher Heizung.

Die rechnerische Erfassung des Termes j^2/σ hat zur Folge, daß die Funktionen g_w und g_M im Gleichungssystem (29) von positiven nach negativen Werten abfallen werden. Andererseits zeigen die Experimente ein Anwachsen der Mach-Zahl von $M < 1$ am Anfang auf $M > 1$ am Ende der Düse. Es muß also ein Strömungstyp vorliegen, bei dem an der Stelle ζ^* Zähler und Nenner in den Gln. (29) simultan den Wert Null annehmen. Da die aus dem Experiment bekannten Anfangswerte der Strömungsparameter keine Lösungen des Differentialgleichungssystems sind und dieses in der Nähe von $M = 1$ sehr empfindlich bezüglich geringster Änderungen ist, scheitert eine bei $\zeta = 0$ beginnende Integration entweder durch das Auftreten von unendlich großen Gradienten oder Vorzeichenwechsel (weil Zähler und Nenner für $M = 1$ numerisch nicht simultan gegen Null gehen). Man hat deshalb so zu verfahren, daß mittels der in 2.3.2. angegebenen Beziehungen zunächst alle Größen bei einem gewählten Wert ζ^* analytisch berechnet werden und die Integration dann von $\zeta^* - d\zeta$ aus nach $\zeta = 0$ hin erfolgt. Ist nach wiederholtem Durchführen dieses Vorganges für verschiedene ζ^* eine hinreichende Übereinstimmung mit den bekannten Anfangswerten erzielt, so wird auch von $\zeta^* + d\zeta$ aus nach $\zeta = 1$ hin integriert. Damit liegt eine Lösung des Differentialgleichungssystems vor, die dem Vergleich mit experimentellen Daten dienen kann.

Bei dem folgenden Beispiel handelt es sich um einen im Hinblick auf den Vergleich Theorie – Experiment gerechneten Strömungszustand. Den Rechnungen liegt die Düsenform $F(\zeta)_1$ mit $R_0 = 8$ mm, $L = 65$ mm und $R_e/R_0 = 5$ sowie die Stromstärkevariation $J(\zeta)_3$, $J(\zeta)_4$, $J(\zeta)_5$ mit $J_0 = 3000$ A zugrunde; der Massenfluß beträgt $\dot{m} = 0,3$ g/s, das Verhältnis der spezifischen Wärmen $\gamma = 5/3$ und die elektrische Leitfähigkeit $\sigma = 7850$ A/Vm.

Abb. 9 vermittelt einen Begriff von dem Verlauf und der Größenordnung der in den Gln. (23), (26) und (27) definierten Kennzahlen. Die sprunghaften Änderungen bei ζ_A werden durch die wegen $(dJ/d\zeta)\zeta_A \neq 0$ sprunghaft vergrößerte eigenmagneti-

sche Kraft hervorgerufen. Für $\zeta \rightarrow 1$ gehen N_p und N_E gegen Null, während N_K unendlich groß wird. Die Tatsache, daß N_p in weiten Teilen der Düse größer als eins ist, läßt die Bedeutung der eigenmagnetischen im Vergleich zu den gaskinetischen Kräften erkennen. Der Verlauf von N_K weist auf ein nahezu konstantes Verhältnis von elektromagnetischer zu aerodynamischer Schuberzeugung im Düsenteil zwischen ζ^* und ζ_A hin. Weiters wird der starke Einfluß der Jouleschen Heizung, der im Unterschallbereich besonders ausgeprägt ist, verdeutlicht.

In Abb. 10 ist der Strömungsverlauf an Hand von Geschwindigkeit, Mach-Zahl und Druck als Funktion der dimensionslosen Ortskoordinate dargestellt. Der starke Gradient vor allem des Druckes im Unterschallgebiet mag einen Eindruck von dem Fehler vermitteln, den man in der Beschreibung des Strömungsvorganges ohne Berücksichtigung des sonischen Durchganges beginge. Auch im Überschallbereich erfolgt bis etwa $\zeta \approx 0,25$ eine starke Beschleunigung, die in der dort noch beträchtlichen Flächenänderung und den dadurch hervorgerufenen Kräften beruht. Schließlich bewirken im Anodenring die aus dem Verschwinden der Stromstärke resultierenden Kräfte eine weitere Zunahme von Geschwindigkeit und Mach-Zahl sowie ein Absinken des Druckes.

Die unterschiedlichen Stromstärkevariationen $J(\zeta)_3$ bis $J(\zeta)_5$ führen zu nur sehr geringfügig voneinander abweichenden Strömungszuständen am Düsenende²¹. Dies läßt die in dieser Analyse erforderliche Annahme des Stromstärkeverlaufes gerechtfertigt erscheinen.

3. Experimentelle Untersuchungen

Den technischen Aufbau des im Experiment verwendeten Beschleunigers zeigt Abb. 11. Die Düse ist entsprechend MAECKERS Kaskadenprinzip²³ aus einzelnen, gegenseitig isolierten Kupfersegmenten aufgebaut. Durch diese Maßnahme kann der elektrische Strom, der Plasmaströmung folgend, bis zur Anode geführt werden, ohne daß an unerwünschten Stellen Stromübergänge zur Düsenwandung erfolgen. Die drei Ringe, welche den divergenten Düsenteil von 65 mm Länge bilden, verfügen jeweils über einen eigenen Kühlwasserkreislauf, was eine detaillierte Bestimmung der Verlustwärme ermöglicht. Die bei

den größten Segmenten, Ring II und III, können wahlweise an Anodenpotential geschlossen werden. Der Stromanschluß erfolgt dabei symmetrisch, um eine Beeinflussung der Entladung durch die Felder der Zuleitungen möglichst gering zu halten. Bei den hier zu besprechenden Experimenten stellt Ring III mit einem Austrittsdurchmesser von 80 mm die Anode dar. Gegenüber einer Düse, die nicht segmentiert ist, hat diese Konstruktion den Vorteil, daß

1. die zur Realisierung des eigenmagnetischen Effekts erforderliche Aufweitung der Lichtbogenentladung erzwungen wird,
2. durch die ungefähre Kenntnis des anodischen Stromübergangsbereiches ein Vergleich zwischen gemessenen und theoretisch berechneten Werten des Schubes erleichtert wird und
3. die anodischen Verluste, gesondert von den übrigen Wärmeverlusten an die gekühlten Wandungen, näherungsweise ermittelt werden können.

Die stabförmige Kathode ist aus thoriertem Wolfram gefertigt. Bei einer Länge von 50 mm hat sie einen Durchmesser von 10 mm bzw. 8 mm, je nach Verwendung des Düsenhalssegments mit $d_0 = 16$ bzw. 12 mm. Die axiale Kathodenstellung kann verändert werden, ist hier jedoch mit 7 mm vor Beginn des divergierenden Düsentails fixiert.

Das Gerät wird mit 0,15 und 0,3 g/s Argon in einem Stromstärkebereich von 500 bis 3000 A betrieben, wobei der Druck p_∞ im Vakuumtank bei allen Betriebszuständen mit 0,5 Torr konstant gehalten wird. Der Lichtbogen brennt in einer stabilen Form mit diffusen Elektrodenansätzen.

Die Strom-Spannungs-Kennlinie $U(I_0)$ der Entladung sowie deren „Säulenspannung“ U_s sind in Abb. 12 dargestellt. Letztere ergibt sich aus der Bogen-spannung U durch Abziehen der experimentell bzw. theoretisch ermittelten Elektrodenfallspannungen sowie der induzierten Spannung. Mit Hilfe von U_s wird die Stromstärkeabhängigkeit der in den Rechnungen als konstant längs z angenommenen elektrischen Leitfähigkeit berücksichtigt, wobei von einem bekannten Wert ausgegangen wird, welcher wiederum aus der Spitzerschen Formel entsprechend gemessener Daten von Elektronentemperatur und -dichte folgt²¹.

Der Schub stellt die Reaktion aller sich an dem Beschleuniger abstützenden aerodynamischen wie elektromagnetischen Kräfte dar. Seine Messung erfolgt in einer andernorts beschriebenen Waage¹². Die

²³ H. MAECKER, Z. Naturforsch. **11 a**, 457 [1956].

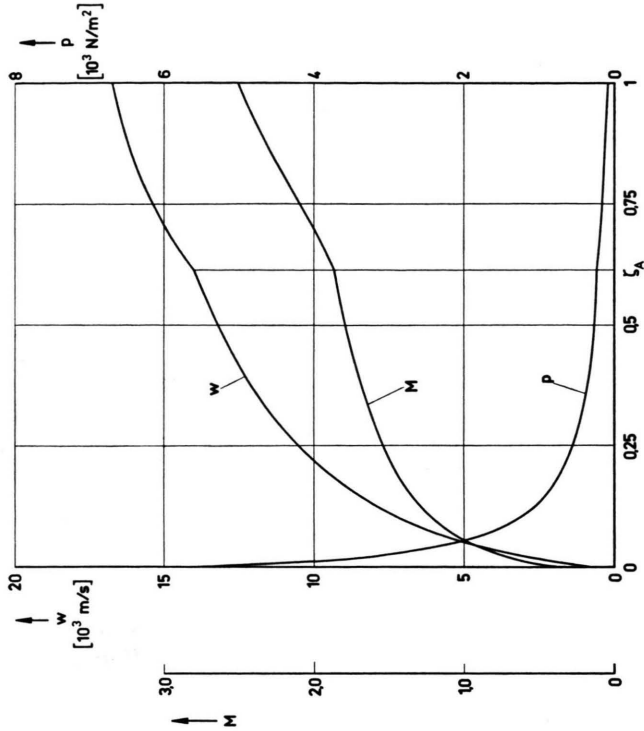
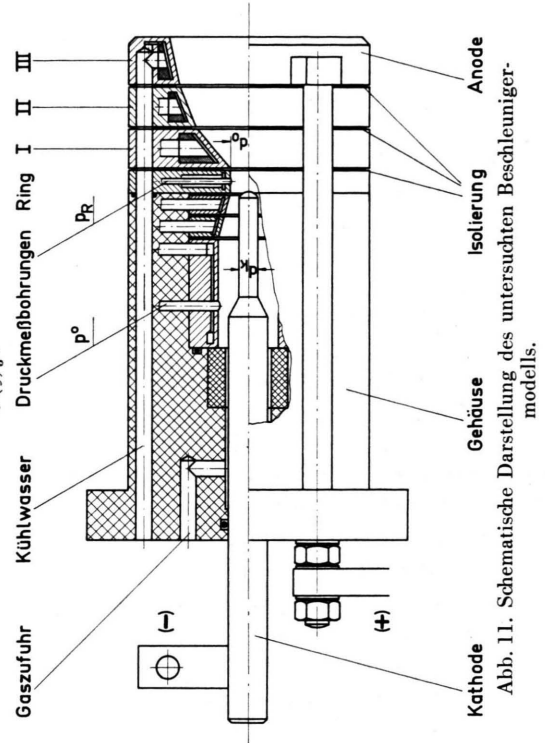
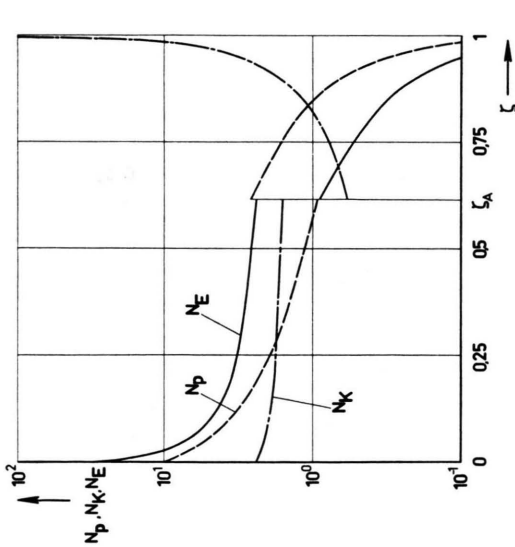
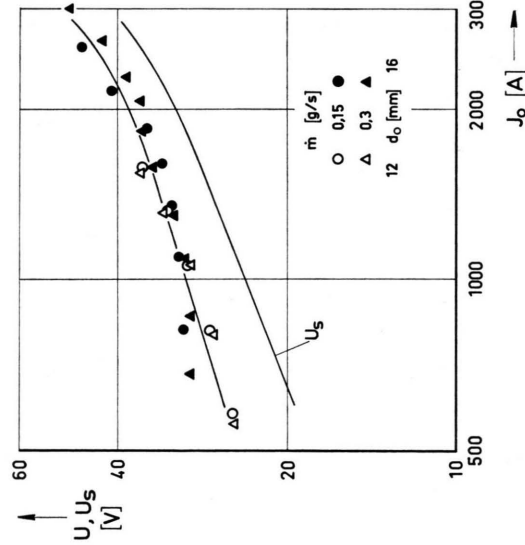

 Abb. 10. Geschwindigkeits-, Mach-Zahl- und Druckverlauf längs der Düse; $J(\zeta)_3$.


Abb. 11. Schematische Darstellung des untersuchten Beschleunigermodells.


 Abb. 9. Verlauf von N_p , N_k und N_e längs der Düse; $J(\zeta)_3$.

 Abb. 12. Strom-Spannungs-Kennlinie U und „Säulenspannung“ U_s der Lichtbogenentladung im untersuchten Beschleunigermodell.

Abhängigkeit des gemessenen Schubes S vom Bogenstrom J_0 ist besonders aufschlußreich, wenn sie in logarithmischer Darstellung wiedergegeben wird; siehe Abb. 14. Ebenfalls eingezeichnet ist der aus den eigenmagnetischen Kräften resultierende Anteil

S_m , welcher proportional dem Quadrat der Stromstärke ist:

$$S_m = \int_0^L k F dz + \frac{\mu_0 J_0^2}{4\pi} \ln \frac{d_0}{d_K} + \frac{\mu_0 J_0^2}{8\pi}. \quad (42)$$

Während der erste Term in Gl. (42) die Integration von Gl. (12) und damit die gesamte axiale Kraft innerhalb des divergierenden Düsentails beschreibt, berücksichtigt der zweite Ausdruck die Schubkomponente, welche auf Grund der sich vom Kathoden zum Düsenhalsquerschnitt erweiternden Lichtbogenentladung entsteht. Der Anteil $\mu_0 J_0^2 / 8\pi$ ergibt sich durch Abstützen des durch radiale Kräfte erzeugten Druckberges an der Kathode.

Der Verlauf des gemessenen Schubes zeigt eine mit steigender Stromstärke zunehmende Abhängigkeit von dieser. Der Exponent der durch die Meßpunkte gelegten Kurven wächst von etwa 0,5 bis 0,75 bei niedrigen bis zu 2 bei hohen Stromstärken. Unter bestimmten Betriebsbedingungen folgt also der gemessene Schub der Beziehung $S \sim J_0^2$, was bedeutet, daß dann die eigenmagnetischen Kräfte den dominierenden Anteil zur Schuberzeugung (Geschwindigkeitserzeugung) beitragen. Die Stromstärke, ab welcher dies eintritt, liegt um so höher, je größer der Massenfluß ist, weil dann der thermisch-aerodynamische Schub (näherungsweise proportional $\dot{m}^{0.5}$) mehr ins Gewicht fällt. Andererseits folgt aus den Messungen sehr deutlich, daß der Einfluß von \dot{m} bei hohen Stromstärken immer geringer wird.

Die dem gemessenen Schub entsprechenden mittleren Massengeschwindigkeiten nehmen mit steigender Stromstärke von etwa 3000 m/s bei niedrigen bis 12 000 m/s bei hohen Bogenstromstärken zu.

Die Mach-Zahl des aus der Düse austretenden Plasmastrahles wird aus Messungen des Pitot- und statischen Druckes erhalten. Den Einfluß des Massenstromes auf das radiale Staudruckprofil zeigt Abb. 13. Da der statische Druck nahezu konstant über dem Querschnitt ist, ergibt sich für den größeren Wert von \dot{m} ein steileres Mach-Zahlprofil als für den kleineren. Die Abhängigkeit der in der Strahlachse gemessenen Mach-Zahlen von Stromstärke und Massenfluß zeigt Abb. 15.

Eine ausführliche Darstellung der experimentellen Untersuchungen ist in ¹⁴ zu finden.

4. Vergleich zwischen berechneten und gemessenen Werten des Schubes und der Mach-Zahl

Außer den bereits besprochenen Schubwerten aus dem Experiment sind in Abb. 14 die theoretischen Werte eingetragen. Da im allgemeinen der Druck p_e im Endquerschnitt der Düse F_e höher als der Um-

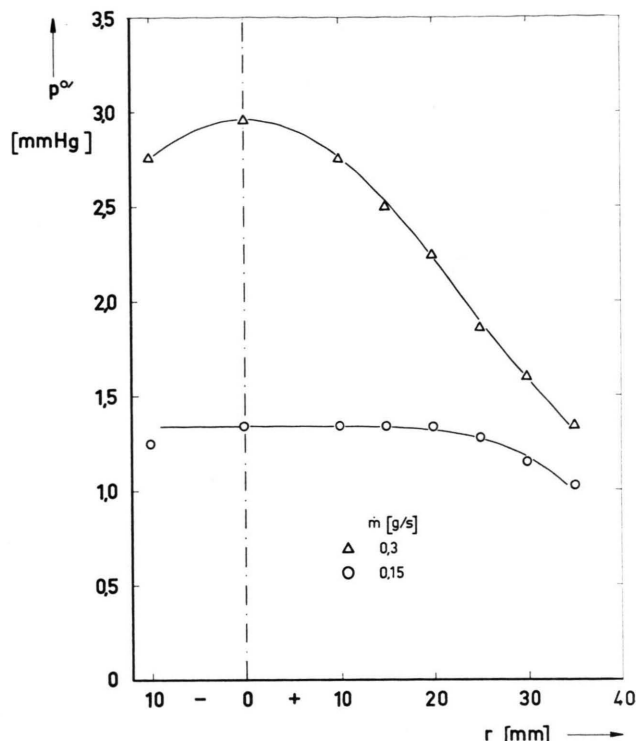


Abb. 13. Pitotdruckprofile in Plasmastrahlen 30 mm hinter Düsenende bei $J_0 = 800$ A.

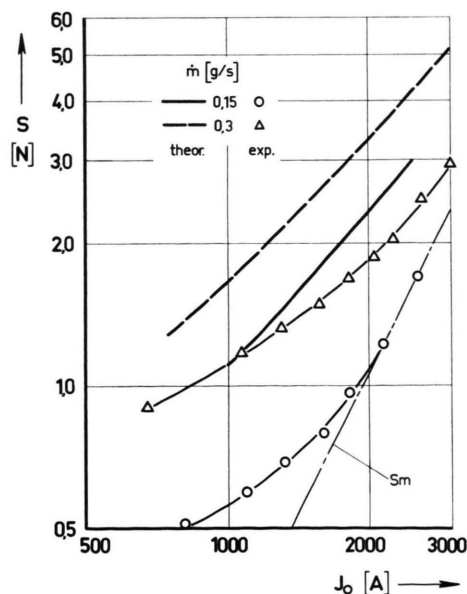


Abb. 14. Vergleich zwischen gemessenen und theoretisch berechneten Schubwerten für eine Düse mit $d_0 = 16$ mm.

gebungsdruck p_∞ liegt, gilt die Beziehung

$$S = (p_e - p_\infty) F_e + \dot{m} w_e, \quad (43)$$

wobei p_e und w_e nach dem in 2.4.2. angedeuteten Verfahren erhalten werden. Der so berechnete Schubverlauf gibt den charakteristischen Einfluß von Stromstärke und Massenfluß in guter Übereinstimmung mit dem gemessenen wieder. In den absoluten Werten jedoch ist der theoretische Schub erwartungsgemäß zu hoch. Als wesentlichste Ursache hierfür wird die Vernachlässigung der Wärme- und Reibungsverluste an den Düsenwandungen in der theoretischen Beschreibung erachtet. Die kalorischen Messungen zeigen, daß bei einem Massenfluß von $\dot{m} = 0,3$ g/s immerhin 30 bis 45% und bei $\dot{m} = 0,15$ g/s sogar 40 bis 60% der gesamten Bogenleistung an das Kühlwasser abgeführt werden. Dieser Wärmeaustausch zwischen Strömung und Wand ist mit einem Impulsaustausch gekoppelt, so daß an der Wand Schubspannungen auftreten, die eine Bremsung der Strömung bewirken. Der Einfluß der Wandreibung konnte auch experimentell durch Schubmessungen an einer um etwa ein Drittel kürzeren Düse nachgewiesen werden.

In Abb. 15 schließlich sind die experimentellen und theoretischen Werte der Mach-Zahl zum Vergleich dargestellt. Bei der Berechnung der Mach-Zahl im freien Plasmastrahl wird die Nachexpansion von p_e auf p_∞ als isentroper Vorgang berücksich-

messenen hingegen Werte auf der Strahlachse darstellen. Im Zusammenhang mit den in Abb. 13 gezeigten Staudruckprofilen kann man sich leicht verdeutlichen, daß experimentelle Mittelwerte der Mach-Zahl wesentlich näher beisammen liegen als die Achswerte. Damit wird die Diskrepanz zwischen theoretisch und experimentell gefundenem Einfluß des Massenstromes beträchtlich reduziert.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß die quasi-eindimensionale magneto-gasdynamische Theorie den experimentell verifizierten Fall einer Düsenströmung mit Joulescher Heizung und eigenmagnetischen Kräften in befriedigender Weise zu beschreiben vermag.

5. Abschließende Bemerkungen

Die hier durchgeführte theoretische Behandlung bietet einen Rahmen sowohl für qualitative wie auch für quantitative Diskussionen von Plasmaströmungen in coaxialen Lichtbogenentladungen. Die experimentellen Untersuchungen lassen die Wirksamkeit und Bedeutung des eigenmagnetischen Effekts bei der Geschwindigkeitserzeugung erkennen.

Einer klaren Übersicht wegen wurde die theoretische Beschreibung des Strömungsvorganges bewußt auf die Effekte von Flächenänderung, Joulescher Heizung und eigenmagnetischen Kräften beschränkt. Reibungs- und Wärmeverluste an der Wand können ohne nennenswerte Schwierigkeiten berücksichtigt werden. Ebenso ist die Annahme einer konstanten Stromdichte im Querschnitt, die im Hinblick auf Vergleiche mit früheren Analysen getroffen wurde, keineswegs erforderlich. Geht man von einer anderen, z. B. parabolischen, am Rande auf Null abfallenden Stromdichteverteilung aus, dann hat dies lediglich das Auftreten eines Faktors $11/6$ vor dem zweiten Term in Gl. (12) zur Folge, was für Düsenströmungen bei der Berechnung des Schubes kaum ins Gewicht fällt.

Die Voraussetzung kleiner magnetischer Reynoldszahlen ermöglicht eine direkte Beschreibung des Strömungsvorganges als Funktion der Ortskoordinate z. Abschätzungen von Rm für die im Experiment verwirklichten Zustände erbringen Werte, die von $Rm \approx 0,01$ auf knapp eins bei Stromstärken von 2500 bis 3000 A ansteigen. Sondenmessungen lassen vermuten, daß bei diesen extremen Bedingungen etwa 10% des elektrischen Stromes aus der Düse herausgezogen werden, während der Anteil

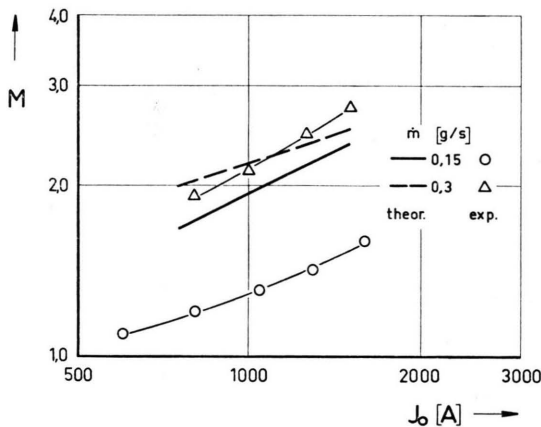


Abb. 15. Vergleich zwischen gemessenen und theoretisch berechneten Mach-Zahlen für eine Düse mit $d_0 = 12$ mm.

sichtigt. Auch hier gibt die Theorie gut übereinstimmend mit dem Experiment die Effekte von Stromstärke und Massenfluß wieder. Allerdings scheint der experimentelle Mach-Zahlverlauf auf einen größeren Einfluß von \dot{m} hinzudeuten als der theoretische. Es darf jedoch nicht außer acht gelassen werden, daß die berechneten Werte Mittelwerte, die ge-

bei niedrigen Stromstärken geringer ist²⁴. Im Hinblick auf den relativ geringen Einfluß von Stromstärkeverlauf und Stromdichteverteilung auf den Strömungszustand im Endquerschnitt einer Düse kann deshalb die Vernachlässigung der induzierten Felder bezüglich der Stromdichteverteilung gut treten werden.

Die theoretischen und experimentellen Untersuchungen werden weitergeführt. Zur Zeit sind Versuche mit einem Beschleunigermodell im Gange, das für Stromstärken bis 5000 A ausgelegt ist. Die theoretische Analyse wird durch Berücksichtigung von

²⁴ F. MAISENHÄLDER u. W. SCHOCK, persönl. Mitteilungen.

Wandreibungs- und Wärmeverlusten verfeinert. Schließlich soll auch, insbesondere bei sehr hohen Stromstärken, der Einfluß großer magnetischer Reynolds-Zahlen und zweidimensionale Effekte in Rechnung gestellt werden.

Die vorliegende Arbeit wurde am Institut für Plasmadynamik der Deutschen Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt durchgeführt. Dem Leiter des Instituts, Herrn Dr. TH. PETERS, bin ich für die Anregung dazu sowie für zahlreiche Diskussionen zu Dank verpflichtet. Für ihr Interesse an der Arbeit gilt mein Dank ebenso Herrn Prof. Dr. H. MAECKER, Herrn Dozent Dr. K. RAGALLER und Herrn Dozent Dr. F. HINDELANG.

Radiales Druckprofil in einem magnetoplasmadynamischen Wasserstoff-Lichtbogen

I. 5-Momenten-Approximation

W. L. BOHN und T. E. McCANN *

DFVLR-Institut für Plasmadynamik, Stuttgart

(Z. Naturforsch. 25 a, 1332—1343 [1970] ; eingegangen am 16. Februar 1970)

Within the framework of the five-moments approximation the radial pressure profile of an MPD-arc is calculated as a function of the ambient pressure and the superimposed magnetic field. In addition to the well known pressure increase due to ambipolar diffusion, the typical axi-symmetric MPD geometry provides further pressure increase or decrease by the interaction of current density (Hall-effect) or mass flow with the magnetic field. Characteristic pressure profiles for assumed current and flow fields and for various superimposed magnetic field strengths are shown in numerous diagrams and are discussed by use of the generalized Ohm's law. A significant pressure decrease due to mass entrainment becomes evident. Deviations from LTE are considered in the frozen flow approximation. The theoretically predicted pressure decrease in the axial region of the plasma flow of an MPD-arc subjected to mass entrainment agrees qualitatively with experimental results.

I. Einleitung

Das Verhalten des radialen Druckprofils in einem sowohl stationären als auch statischen (also ohne Schwerpunktschwindigkeit) zylindersymmetrischen Plasmas mit überlagertem axialen Magnetfeld ist seit der Arbeit von WIENECKE¹ bekannt: Die durch die partialen Druckgradienten einsetzende Bewegung der Ladungsträger vom heißen Kern des Lichtbogens zu seinen kälteren Randzonen führt über die Wechselwirkung mit dem axial überlagerten Magnetfeld zu einer azimuthalen Stromdichte. Dieser dadurch entstehenden $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ -Kraft in radialer Richtung wird im Plasma ein radiales Druckprofil entgegengestellt. Im lokalen thermo-

dynamischen Gleichgewicht (LTE) hängt das Druckprofil nur von der Temperatur, der Größe des angelegten Magnetfeldes und dem Umgebungsdruck ab.

Wir möchten das oben geschilderte Verhalten in einem stationären magnetoplasmadynamischen Lichtbogen (MPD-Arc) untersuchen. Letzterer unterscheidet sich von einem konventionellen Lichtbogen vor allem dadurch, daß das axial überlagerte Magnetfeld zur ringförmigen Anode hin divergiert und eine starke Plasmaströmung von der Kathodengegend zur Anodengegend vorhanden ist. Die experimentelle Anordnung solcher kontinuierlich arbeitenden MPD-Lichtbögen wie sie in den letzten Jahren für die elektrischen Antriebe in der Raum-

Sonderdruckanforderungen an W. L. Bohn, Deutsche Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt Institut für Plasmadynamik, D-7000 Stuttgart

* Kirtland AFB, New Mexico.

¹ R. WIENECKE, Z. Naturforsch. 18a, 1151 (1963).